173. Freie Gruppe ノ構造ノ幾何學的解釋

小松醇郎（阪大）

一ツノ集合体ノ性質ヲソノ Fundamentalgruppe ノ構造カラ特徴ヅケ得ル場合ガ少クナイ、二次元ノ曲面ノ場合ハソノ可符号性、種數（geschlecht）等ハ一ツノ例デアル、而シテ之ヨリ逆ニ二ツノ freie gruppen

$$(1)\begin{cases} \text{Erzengende} & a_1, \cdots\cdots, a_p,\ b_1, \cdots\cdots, b_p \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^{p} (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = E \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \text{Erzengende} & a_1, \cdots\cdots, a_p, a_{p+1}, \cdots\cdots, a_{2p} \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^{2p} a_i \prod_{i=1}^{2p} a_i^{-1} = E \end{cases}$$

ノ isomorph ガ言ヘル。

（W. Threlfall : Gruppenbilder 參照）

三次元集合体ノ性質ヲ Gruppe ノ構造カラ明ニスルコトハ甚ダ複雜ナ問題デアルガ先ヅ H. Kneser ノ定理ヲ簡單ニ証明スル。

此ノ定理ハ H. Kneser ガ Jahres. der. Deut. Math. Verein. Bd. 38 デ試ミタモノデアルガ、ソノ証明ハ當時未ダ Vermutung デアッタ Dehn ノ Lemma ヲ用ヒタノミナラズ、ソノ冗長難解ニ至ッテハ天下一品デアル。

定理ソノモノハ然シ私ガ本紙．数．談．会ノ15号デ試ミタ Dehnsches Lemma ノ証明ガ正シク又 Kneser ノ証明ガ正シケレバ正シカツタ筈ノモノデアル。今此処デハ全ク別ニ Dehnsches Lemma ヲ用ヒズニ証明スル。

Kurosch ノ Isomorphiesatz (Freie Produkte von Gruppen. Math. Ann. Bd. 109) ヲ利用スルガコレガモット簡単ニ出来ルナラ有難イワケデアル．誤ヲ記シテハ居ナイト思フガ不備ノ点アラバ御教示願ヒマス。

定理．三次元閉集合体ノ Fundamentalgruppe ガ二ツノ Untergruppe ノ freies Produkt ニ分タレルナラバ其ノ集合体ハ二次元球面デ二ツニ分タレ、ソノ各々ノ Fundamentalgruppen ハ分タレタ二ツノ Untergruppen ニ夫々 isomorph デアル様ニ出来ル。

此ノ逆ハ明カデアルカラ是ガ或意味デ幾何学的性質ヲ特徴付ケル。

証明．M^3 ノ種数 p トスレバ、種数 p ノ二ツノ Vollbrezeln Σ_1^3, Σ_2^3 ニ分タル、夫々ノ準備曲面 F_1, F_2, ソノ上ノ標準切断線

r_i', u_i' in F_1 且 r_i' homotop 0 in Σ_1^3.

s_i', t_i' in F_2 且 t_i' homotop 0 in Σ_2^3.

$$(i=1,2,\cdots\cdots,p)$$

トシ、F_1 ヲ F_2 ヘノ topologische Abbildung ヲ

$$(1)\begin{cases} r_i' = \Pi_{r_i}(S, t) \\ u_i' = \Pi_{s_i}(S, t) \end{cases}$$

トス。Definierende Relationen der Fundamentalgruppe von M_1^3

$$E = \Pi_{r_i}(S, E) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

ヲ次ノ規則ニ従ッテ Klasse ニ分ケル。

一ツノ Relation ノ中ニ Erzengende s_i, s_k $(i \neq k)$ が表ハレル（trivial ノ Reduktion $s_i s_i^{-1}$ ヲ除イテ）ナラバ s_i 及ビ s_k ヲ Wesentlich ニ含ム Relationen ヲ凡テ一ツノ Klasse ニ入レル。

異ル Klasse ノ中ノ Relationen ノ中ニハ決シテ等シイ Erzengende ハ表ハレナイ。

尚 Relationensystem ノ中デ "elementare Transformation" ヲ行ヒ此ノ Klasseneinteilung ヲ出来ルダケ細ク戻ス。

斯クテ Erzengende s_i 及ビ Relationen ノ Klasseneinteilung が出来、一ツノ Klasse が一ツノ Untergruppe ヲ定義シ、ソコニ含マレル Erzengende が Untergruppe ノ Erzengende デアル。

F_2 ニテ一ツノ Klasse ニ表ハレル Erzengende s_k 凡テノ Henkel ヲ他ノ部分ト切リ離ス E_2^2 ヲ考ヘル。E_2^2 ハ

Σ_2^3 ヲ二分シ E_2^2 ト F_2 トノ交線 S_2 ハ F_2 ヲ二分スル。

$F_1 \to F_2$ ノ Abbildung ハ topologisch デアルカラ S_2 ノ F_1 上ノ Urbild S_1 ハ F_1 ヲ二分シ夫々 F_2 ノ二分サレタ部分ニ homöomorph、從ッテ S_1 ハ F_1 上デ homolog 0.

次ニ Σ_1^3 ヲ $F(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ ノ stetige Schar トシ $F(1) = F_1$, $F(0)$ ハ Ausarten シタ曲面即チ Σ_1^3 内ノ一点 Q ヲ通ル p 個（種数）ノ円トスル。即チ Σ_1^3 デ $F(1)$ ガ $F(0)$ ニ homotop.

$F(1)$ ハ $F(t)$ $(t>0)$ ニ homöomorph デ topologische Deformation デ移レル、然ラバ S_1 ハ $S_1(t)$ ナル閉曲線ニ移リ又 $F(t)$ ヲ二分スル、凡テノ t デ二分サレタ各々ガ Deformation デ移ッタ空間部分ハ互ニ separate サレ両者ハ併セテ Σ_1^3 ヲ作ル。

而シテ両者ノ境ハ S_1 ガ homotop 0 ニナル部分デアルカラ一ツノ Elementarfläche デアル。

但シ $F(0)$ ノ曲線ニ沿ヒ切スル部分ガ出テ来ルコトモアラウガ S_1 ハ $F(1)$ デ homolog 0. 即チ $S_1 = \Pi(r, u)$ ト表サレテモ r ト共ニ r^{-1}, u ト共ニ u^{-1} ガ必ズ表ハレテ居ル、從ッテ S_1 ガ $F(0)$ ニ至ルトキ even number ノ branch of plane ガ $F(0)$ デ切スルダケダカラ少シノ変形デ切点ヲ離レシメ得ル。

又 $\mathfrak{S}_1$ ガ $\mathfrak{S}_1(0)$ ニナルトキ点Qヲサケ得ルハ明カデアル。
此ノ Elementarfläche ヲ E_1 デ表ハセバ E_2 ト E_1 トヲ $\mathfrak{S}_1$ デ合セタ S^2 ハ球面ニ homöomorph. 且ツ M^3 ヲ二分スル. 且ツソノ fundamentalgruppe ハ一方ハ始メノ一ツノ Klasse ノ Untergruppe ニ isomorph デアル。

fundamentalgruppe ノ任意ノ freies Produkt ニ分ケル Untergruppe モ Kurosch ノ Isomorphiesatz ニヨレバ、上述ノ Klasseneinteilung ニヨル Untergruppe ノ freies Produkt ト isomorph デアルカラ定理ハ完了。

次ニ M^3 ガ球面デナク種数 p ノ曲面デ二分サレル場合ノ証明ヲ求メルノデアルガ. 此ノ場合ニハ Kurosch ノ Satz ヲ Freie Produkte mit vereinigten Untergruppen ノ場合ニ擴張セネバナラナイ。且ツ vereinigt サレタ Untergruppe ハ Erzengende $2p$ 個.

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p, b_1, \cdots\cdots, b_p$$

Relationen $$\prod_{i=1}^{p} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = E$$

ナル最始ニ此シタ freie Gruppe mit Relation デス. 此ノ freie Produkt ノ Gruppe ニ對スル Isomorphiesatz ガ少々面倒デアルシ幾何學的ノ性質ニ對應付ケルトキ Heegaard Diagramm ダケデハ成功シナイノデ行止リノ状態デス。